



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

CREACIÓN DE PROBLEMAS COMO RECURSO DIDACTICO EN CURSOS DE MATEMÁTICA FORMAL DIRIGIDOS A FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA DE SECUNDARIA

- Salazar Solórzano, Lorena^{1,2}

⁽¹⁾ Universidad Nacional de Costa Rica.

Escuela de Matemática. Facultad de Ciencias Naturales y Exactas.
Campus Omar Dengo. Ave. 1 Calle 9, Heredia, Costa Rica.

lsalaz@una.ac.cr

⁽²⁾ Universidad de Costa Rica.

Escuela de Matemáticas. Facultad de Ciencias.
Campus Rodrigo Facio. Montes de Oca, San José, Costa Rica.

lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr

1. **RESUMEN:** Se presentan los resultados de una investigación, realizada con futuros profesores de matemática de educación media, sobre la incorporación de tareas de creación y variación de problemas en las asignaturas de matemáticas. Se han hallado evidencias de que la introducción de estas tareas incide positivamente en la comprensión de los alumnos de definiciones, enunciados de ejercicios y teoremas sobre tópicos de matemática formal, así como sobre su competencia de reflexión sobre las matemáticas.
2. **ABSTRACT:** The results of research conducted with future teachers of mathematics middle school on posing task and variation of problems in the subjects of mathematics are presented. We have found evidence that the introduction of these tasks has a positive effect on student understanding of definitions, statements of theorems and exercises on topics of formal mathematics, as well as competence of reflection on mathematics.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

3. PALABRAS CLAVE: Creación de problemas, formación inicial, educación matemáticas, continuidad, grupos. / **KEYWORDS:** Posing problems, initial training, mathematics education, groups, continuity.

4. DESARROLLO:

En la última década ha habido un auge de las investigaciones referentes al conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para lograr una enseñanza eficiente (Rubio, 2012, Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008; Silverman, J. y Thompson, 2008; Font, 2011). Por ejemplo, Rubio (2012), señala que el futuro profesor debe tener competencia matemática, pero que esto no es suficiente, también debe tener competencia en el análisis de la actividad matemática. Esta investigación pretende mostrar como la invención de problemas resulta ser una herramienta poderosa, no solo para lograr la asimilación de conceptos matemáticos, sino que a su vez logra la reflexión sobre la actividad matemática. Es por esto que el objetivo planteado es el siguiente:

Objetivo: Investigar el efecto que produce, en la comprensión y el rendimiento académico de futuros profesores de matemáticas de secundaria, la incorporación de tareas cuya consigna es la variación y creación de problemas en tópicos de matemática formal de análisis y de álgebra.

A continuación se dan algunas de los referentes teóricos usados para sustentar la investigación, que básicamente fueron creación de problemas y diseño de tareas.

a) Creación de problemas

Varias de las investigaciones en educación matemática centran su atención no solo a la resolución de problemas, sino también al planteamiento de problemas. Por ejemplo, en Malaspina (2013) se afirma que la creación de problemas está estrechamente ligada a la resolución de problemas y contribuye al desarrollo del pensamiento matemático al brindar



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

oportunidades, a alumnos y profesores, para examinar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas.

Este tipo de estrategias, en la formación inicial de futuros profesores de matemática para secundaria, facilitan por un lado, la asimilación de los conceptos propiamente matemáticos y, por otro lado, reflexiones sobre la matemática y su futuro quehacer profesional.

En Malaspina (2013) se afirma que se trata de una estrategia que: estimula la capacidad de crear y resolver problemas; lleva a reflexiones didácticas y matemáticas; posibilita encontrar en un problema creado mayores potencialidades que las que se pensaron al crearlo; muestra la importancia de una redacción adecuada del enunciado, dado que al hacer variaciones al requerimiento y al entorno matemático de un problema, se facilitan las generalizaciones y la ampliación del horizonte matemático inicial. Por otro lado, en Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014) se hace un estudio de los propósitos de la invención de problemas en la disciplina de matemáticas. Para estos autores, la invención de problemas es una forma de desarrollar la actividad creativa de los estudiantes y su responsabilidad en el aprendizaje. Por otra parte, resulta ser una ventana para observar la comprensión matemática, ya que puede ser una herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos de los estudiantes y también mejora su disposición y actitudes hacia las matemáticas. En este documento se utiliza la invención de problemas no solo como un medio de lograr la comprensión de conceptos matemáticos formales, sino también como un medio de reflexión de la actividad matemática de los futuros profesores.

b) Diseño de tareas

Para el diseño de las tareas, se consideraron los cuatro aspectos propuestos en Malaspina (2013) para la creación de problemas: información, requerimiento, contexto y entorno matemático.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

Información: Definiciones, teoremas y problemas de libros de texto

Requerimiento: Nivel básico en el área de análisis y álgebra.

Contexto: Intra-matemático

Entorno matemático: Temáticas sobre estructuras algebraicas y funciones continuas.

Tipología de Tareas:

Comprensión de definiciones, creación de problemas que ejemplifiquen las definiciones, búsqueda de generalizaciones, variación de problemas del libro de texto y variación de variación de problemas creados, creación de contraejemplos.

Procesos: Demostración

Organización: Trabajo en grupos

c) Metodología

Esta investigación se desarrolló en los cursos “MAB500 Análisis” y “MA0371 Álgebra para enseñanza”, de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la de la Universidad Nacional y Universidad de Costa Rica, respectivamente, las cuales forman profesores de matemática para educación media. En ella participaron 8 estudiantes del curso de análisis y 20 estudiantes del curso de álgebra. Ambos cursos tienen un carácter de matemática formal tradicional, caracterizados en general por ninguna relación con la matemática escolar y por una carencia de reflexiones didácticas sobre la actividad matemática. El contexto usado en el área de álgebra fue el concepto de grupo como estructura algebraica, mientras que en análisis, el contexto fue el tema de composición de funciones continuas.

Para la recolección de datos, se llevó un registro detallado en un diario donde se fue anotando todo lo ocurrido en el aula. Se recolectaron evidencias escritas por los grupos de trabajo y al final se les aplicó un cuestionario, con el fin de evaluar la actividad realizada. Una semana después, se realizó una prueba específica escrita individual para evaluar la comprensión de los conceptos matemáticos. Se reportan aquí solo algunas de las consignas planteadas, comentarios y resultados, por motivo de espacio.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

d) Desarrollo de la experiencia en el área de álgebra

Mientras que en una exposición tradicional, la docente se limitaba a dar la definición de grupo, seguida de algunos ejemplos e inmediatamente iniciaba con las propiedades inherentes a esta noción; en esta experiencia de investigación, se les proporcionó la definición formal de grupo, junto con una consigna que los hiciera reflexionar sobre los detalles de cada una de sus partes, antes de proseguir a otros niveles de una comprensión superior.

Consigna 1: Expresé con sus propias palabras que entiende por cada uno de los puntos 1, 2 y 3 de la siguiente definición. Ponga atención a los cuantificadores “existe” y el “para todo” involucrados en la misma.

Un grupo $(G, *)$ es un conjunto cualquiera G con una operación $(*)$ tal que:

- 1) La operación $(*)$ es cerrada y asociativa.
- 2) Existe un elemento $e \in G$, llamado elemento neutro, tal que $g * e = e * g = g$, $\forall g \in G$
- 3) Para cada elemento $g \in G$, existe un elemento $g' \in G$, llamado el inverso de g , tal que $g * g' = g' * g = e$, $\forall g \in G$

Se hizo una reflexión sobre la forma en que se escribe en matemática, la formalidad y la importancia de conocer el lenguaje con la lógica que usa esta disciplina. Seguidamente se les solicitó construir o inventar grupos.

Consigna 2:

Defina, de ser posible, una operación en cada uno de los conjuntos siguientes de modo que se forme un grupo:

- a) {bola}, b) {0,1}, c) {1,-1}, d) {a,b}, e) {0,1,-1}, f) {a,b,c}.

Haga lo mismo con los conjuntos infinitos $\bullet$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{S}$, $^{\circ}$ y $\mathbb{E}$.

Con el conjunto $G = \{\text{bola}\}$, tuvieron problemas para inventar una operación. Algunos definieron erróneamente, $\text{bola} + \text{bola} = 2\text{bola}$, pero este último elemento no está en el conjunto, infringiendo la condición de que la operación debe ser cerrada. Por lo tanto,



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

concluyeron después de varias discusiones que no quedaba otra alternativa más que definir $\text{bola} + \text{bola} = \text{bola}$. Esto los sorprendió y el efecto causado fué mayor al descubrirlo por sí mismos.



Fig.1: Operación en un grupo unitario

Se reflexionó sobre lo que es en general una definición en matemática, en donde no se puede asumir nada que no se diga explícitamente. La simbología no debe apegarse a una idea preconcebida; en este caso la operación $+$ es solo un símbolo, no se refiere a la suma usual de conteo en los números naturales.

Para cada uno de los conjuntos $\{0,1\}$, $\{1,-1\}$ y $\{a,b\}$, uno de los grupos definió operaciones, como se muestra en la figura 2.

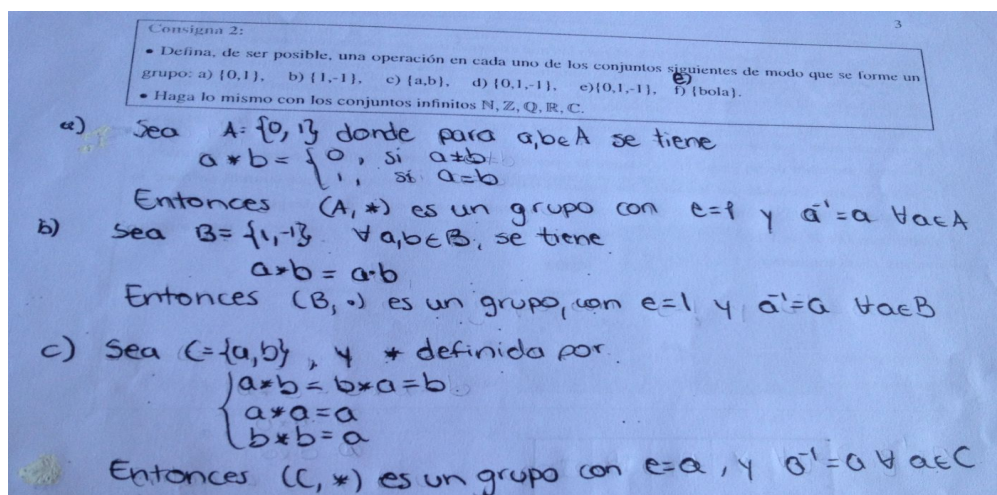


Fig. 2: Creación de grupos de orden dos

En el caso del conjunto $\{0,1\}$, definen una operación $*$ como: 0 si son iguales y 1 si son diferentes. Para el conjunto $\{1,-1\}$ definen la operación producto de números enteros, y para $\{a,b\}$, definen la operación como “a” si son iguales y “b” si son diferentes, repitiendo el argumento usado en el conjunto $\{0,1\}$. Se les hizo plantear los grupos creados usando



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

una tabla, para que se les facilitara notar la similitud de las mismas, de modo que si solo prestaban atención a la estructura de los grupos, en realidad los tres eran el "mismo" grupo. Esto se hizo con el fin de ir introduciendo el concepto de isomorfismo de grupos. Se concluyó que los grupos de orden dos, estructuralmente se reducen a un solo grupo, que es:

$$G = \{e, a\}, \text{ donde } e \text{ es el neutro y } a = a^{-1}.$$

Seguidamente, en los puntos e, f de la consigna anterior, se pretende que logren caracterizar los grupos de orden tres. Sin mucho problema llegan a concluir que solo puede haber un grupo de orden tres de la forma $G = \{e, a, a^{-1}\}$, donde $a^2 = a^{-1}$.

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$a^2=e, b^2=e, c^2=e$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

$a^2=e, b^2=a, c^2=a$
 $c=b^{-1}$

Fig. 3: Tablas de los dos grupos posibles de orden 4

Este tipo de estrategia, genera más preguntas, así por ejemplo uno de los grupos se cuestionó cómo sería entonces un grupo de orden 4, aunque no era parte de la consigna solicitada. Concluyeron, por sí mismos, que solo hay dos tipos, a saber: $G_1 = \{e, a, b, c\}$, donde cada elemento es su propio inverso, y $G_2 = \{e, a, b, b^{-1}\}$, donde a es su propio inverso y $b^2 = a$, como puede verse en la figura 3.

Consigna 3:

Ahora suponga que se tienen dos monedas diferentes. Construya un grupo (G, o) donde la operación o es la composición de movimientos de las monedas y G es el conjunto formado por estos movimientos. (Pinter 2010).



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES



Después de varios intentos, fueron describiendo algunos movimientos como intercambiar las monedas, darles vuelta, lanzarlas hacia arriba, dándose cuenta que al caer podía salir cara o cruz, y dado que el resultado no era seguro, descartaron este movimiento. Otro momento de discusión fue el determinar si lo que importaba eran las monedas en sí, o la posición en que se hallaban. Uno de los grupos, tomando en cuenta la posición de las monedas, definió los siguientes movimientos:

I: Dejarlas igual, V_1 : Voltar moneda 1, V_2 : Voltar moneda 2, V : Voltar ambas monedas, C : Intercambiar las monedas, $V_1 o C$: Intercambiarlas y luego voltar la moneda 1, $V_2 o C$: Intercambiarlas y luego voltar la moneda 2 y $C o V$: Voltarlas y luego intercambiarlas. La tabla se muestra en figura 4:

	V_1	V_2	V	C	$V_1 C$	$V_2 C$	$C V$	I
V_1	I	V	V_2	$V_1 C$	C	$C V$	$V_2 C$	V_1
V_2	V	I	V_1	$V_2 C$	$C V$	C	$V_1 C$	V_2
V	V_2	V_1	I	$C V$	$V_2 C$	$V_1 C$	C	V
C	$V_1 C$	$V_2 C$	$C V$	I	V_1	V_2	V	C
$V_1 C$	C	$C V$	$V_2 C$	V_1	I	V	V_2	$V_1 C$
$V_2 C$	$C V$	C	$V_1 C$	V_2	V	I	V_1	$V_2 C$
$C V$	$V_2 C$	$V_1 C$	C	V	V_2	V_1	I	$C V$
I	V_1	V_2	V	C	$V_1 C$	$V_2 C$	$C V$	I

Fig. 4: Tabla que representa al grupo de 8 movimientos de las monedas



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

Otro de los grupos optó por no tomar en cuenta la posición, sino, si la moneda era escudo o corona. Aunque ellos dicen en su solución que no importa el valor de la moneda, en realidad si lo toman en cuenta en su tabla, pues diferencian entre moneda 1 y moneda 2. Así por ejemplo, al voltear la moneda de 100 colones, pasa de corona a escudo, y luego cambiarlas de posición, sigue siendo voltear moneda 1, sin importar la posición donde quedó. Al realizar la tabla, se percatan de que esto no resulta ser un grupo, por ejemplo en la tabla obtienen que $V_2 \circ C = V_2 \circ I \Rightarrow C = I$, lo que contradice que los elementos del grupo son diferentes. Es por esto que deciden eliminar el movimiento C , para obtener un grupo de orden 4.

Consigna 6:

Moneda 1: moneda a la izquierda.

Moneda 2: moneda a la derecha.

Nota: No importa el valor de la moneda, sino la posición de escudo o corona.

Considere $M = \{V_1, V_2, V, C, I\}$, así que

$\circ$	V_1	V_2	V	C	I
V_1	I	V	V_2	V_1	V_1
V_2	V	I	V_1	V_2	V_2
V	V_2	V_1	I	V	V
C	V_2	V_1	V	I	I
I	V_1	V_2	V	I	I

En el cuadro se muestra que I es el elemento neutro y el inverso de cada elemento es sí mismo, a excepción de C que no posee inverso.

Además note que C no realiza ninguna diferencia, por ende procederemos a eliminarlo como se presenta a continuación.

Sea $M_1 = \{V_1, V_2, V, I\}$, donde

$\circ$	V_1	V_2	V	I
V_1	I	V	V_2	V_1
V_2	V	I	V_1	V_2
V	V_2	V_1	I	V
I	V_1	V_2	V	I

Ahora, obtenemos lo siguiente:

- Neutro: I
- Inverso: El inverso de cada elemento es sí mismo.
- Asociatividad: $(V_1 \circ V_2) \circ V = V_1 \circ (V_2 \circ V) \Rightarrow V \circ V = V_1 \circ V_1 \Rightarrow I = I$

Por ende, $(M_1, \circ)$ es un grupo de cuatro elementos.

Fig. 5: Tabla que representa al grupo de 4 movimientos de las monedas



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

Estas dos interpretaciones resultaron ser un foco de interesantes discusiones y reflexiones sobre la matemática y la interpretación de los problemas. Uno de los estudiantes expresó:

“ profesora, que importante es ser bien claro en los enunciados, pues yo nunca hubiera imaginado esa otra interpretación”.

Se les comentó que este es realmente un subgrupo del grupo creado con la primera interpretación, lo cual es un buen ejemplo de grupos isomorfos, donde lo que interesa es la estructura y no la caracterización de los elementos ni de la operación en particular, y mucho menos de interpretaciones diferentes.

e) Desarrollo de la experiencia en el área de análisis

Para el área de análisis se trabajó con el tema de funciones continuas. Se les expuso el teorema de continuidad de la composición de funciones (TCFC), con su prueba de la manera tradicional. Seguidamente se les propuso el siguiente problema del libro de texto, Bartle y Sherbert (2010, p.160), como parte de la tarea de comprensión de enunciados de problemas.

Consigna 6:

Sea g definida en $\mathbb{R}$ por $g(1) = 0$ y $g(x) := 2$ si $x \neq 1$, y sea $f(x) := x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones?

Dado que los estudiantes mostraron falta de conexiones entre este problema y el TCFC, se procedió a darles una guía de preguntas para ayudar a la comprensión del mismo. Seguidamente, y después de que resolvieron el ejercicio e hicieron reflexiones sobre la intención de los autores al crear este problema, se les pidió realizar variaciones al mismo.

Algunos de los problemas creados por los estudiantes, se muestran en el siguiente cuadro. Obsérvese que iniciaron con una variación al problema dado en la consigna, y de ahí realizaron variación de variación de sus propios problemas, como se solicitó en otra consigna.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

Algunos problemas creados por los estudiantes y variación de variación de problemas

- Problema 1: (aplicación del TCFC en $x=3$)
- Sea $g(x) = x - 2$ y $f(x) = x^2$. Justifique porqué se cumple que $\lim_{x \rightarrow 3} (g \circ f)(x) = g(f(3))$.
- Problema 2: (generalización del problema 1)
- Sea $g(x) = x - 2$ y $f(x) = x^2$. Justifique porqué se cumple que $\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(f(c))$.
- Problema 3: (Aplicación del TCFC)
- Sea $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ donde $f(x) = x^2 - x + 1$, y sea $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \ln x$. Pruebe que $\forall c \in \mathbb{R}^+, \lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$
- Problema 4: (variación del problema 3)
- Sean $g(x) = \ln x$, $f(x) = x^2 - x$. ¿Puede garantizarse $\forall c \in \mathbb{R}^+$ que $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$?
- Problema 5: (variación errónea del problema 4)
- Sean $g(x) = \ln(x)$ y $f(x) = x + 1$. Justifique porqué se cumple que $\lim_{x \rightarrow -1} (g \circ f)(x) \neq g(f(-1))$.
- Problema 6: (variación del problema 4)
- Sea $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2 - x$. Determine los valores de $x=c$ para los cuales se da la igualdad $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$.
- Problema 7: (variación al problema 6)
- Sea $f(x) = \sqrt{x-1}$ y $g(x) = x+1$. Determine los valores de x para los cuales $f \circ g$ es continua. Haga lo mismo para, $g \circ f$, $f \circ f$, $g \circ g$, $g \circ f \circ g$.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

- Problema 8:
- Sea $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2 - 4$. Determine los valores de $x=c$ para los cuales se da la igualdad $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$.
- Problema 9: (Otro problema erróneo)
- Sea $g(x) = \sin(x)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$. Justifique el hecho de que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq g(f(0))$.
- Problema 10: (Variación con discontinuidades inevitables)
- Sea $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$ y $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Determine si puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = g(f(1))$.
- Problema 11: (variación del problema 10)
- Sea $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$ y $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Determine si puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$.
- Problema 12: (variación del problema 11)
- Sea $f(x) = \lfloor |x| \rfloor$ y $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Determine si puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 1} g(x))$.
- Problema 13: (dos funciones discontinuas)
- Sean $f(x) = x + 1$ si $x \neq 0$, $f(0) = -5$, y sea $g(x) = 2x$, si $x \neq -5$, $g(-5) = 2$. ¿Puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = g(f(0))$?



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

El problema 1 es una aplicación del TCFC en un punto específico, $x=3$, mientras que el problema 2, lo generaliza a cualquier punto $x=c$. El problema 3, hace una variación de un nivel mayor, dado que se preocupa de que la composición este bien definida, al cuidar que $f(x) = x^2 - x + 1$, tenga solo imágenes positivas. El problema 4 es una variación al anterior, al tomar ahora $f(x) = x^2 - x$, la cual tiene algunas imágenes negativas, por lo que la composición puede no estar bien definida. En el problema 5 se pide probar que dos cosas son diferentes, perdiendo la perspectiva de la existencia de los objetos matemáticos involucrados.

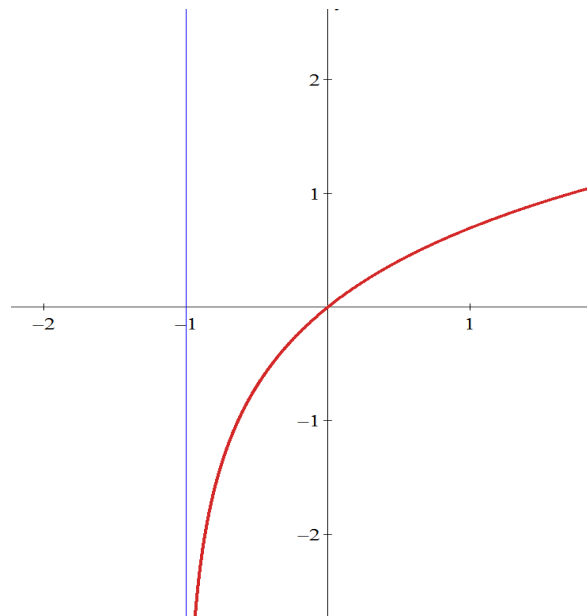


Fig 6. Gráfica del problema 5 $g(f(x)) = \ln(x+1)$

Como puede verse en la figura 6, el límite de la composición no existe puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \ln(x+1) = -\infty ,$$

mientras que $\lim_{x \rightarrow -1^-} (g \circ f)(x)$ no tiene ni siquiera sentido ya que $\ln(x+1)$ no está definido cuando x tiende a -1 por la izquierda. Por otro lado $g(f(-1)) = g(0) = \ln(0)$ tampoco está



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

definido. Después de este tipo de reflexiones los alumnos debían reformular el problema propuesto. En este caso, los estudiantes volvieron a redactar el ejercicio de la forma siguiente:

Corrección del problema 5:

Sea $g(x) = \ln(x)$ y $f(x) = x + 1$. Determine si $\lim_{x \rightarrow -1} (g \circ f)(x)$ y $g(f(-1))$ existen justificando su respuesta. Compare con el TCFC y P5. ¿Se puede afirmar que $\lim_{x \rightarrow -1^+} (g \circ f)(x) = g(f(-1))$?

El problema 6, 7 y 8 son variaciones del problema 5 corregido. En el problema 9 el límite del lado izquierdo no existe pues oscila entre -1 y 1, además que $f(0)$ no está definido. Los estudiantes también hicieron las correcciones pertinentes para rescatar este ejercicio.

Cabe destacar que este problema, involucra discontinuidades del tipo “oscilatoria”, y no simplemente discontinuidades evitables, como el problema original de la consigna 6. Los problemas 10, 11 y 12, también ilustran otro tipo de discontinuidades inevitables, como lo es la función parte entera.

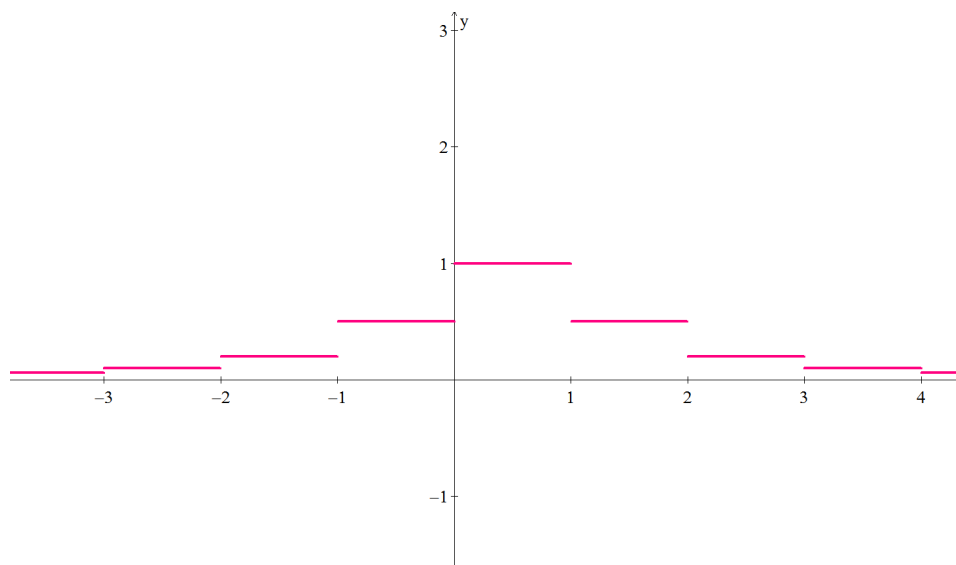


Fig 7. Gráfica del problema 10 $g(f(x)) = 1/([|x|]^2 + 1)$



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

En el problema 10, la igualdad $\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = g(f(1))$ no se cumple pues el límite cuando x tiende a 1, no existe, como puede verse en la figura 7.

El problema 11, en su planteamiento enfatiza uno de los errores más comunes en estudiantes de cálculo, que es ¿cuándo es válido “meter” el límite dentro de la composición? Es decir, cuando es válido afirmar que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$$

En este caso, $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow 1} f(x))$ tampoco se cumple, pues $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [x]$ no existe. En el problema 12, se considera ahora $f \circ g$ en lugar de $g \circ f$, de modo que la igualdad $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 1} g(x))$ es válida por ser una aplicación directa del TCFC, g

es continua en $x=1$ y f lo es en $g(1) = \frac{1}{2}$. Además que como $1 \leq 1+x^2$, entonces

$\left\lfloor \frac{1}{1+x^2} \right\rfloor = 0$, es decir la composición $f \circ g$ es la función idénticamente nula.

Finalmente, el problema 13, muestra dos funciones discontinuas, cuya composición resulta una continua.

Consigna 7: (Visualización gráfica)

Represente gráficamente, usando algún software dinámico cada uno de los problemas creados. Exponga ante sus compañeros sus resultados.

En esta consigna se usaron los programas informáticos geogebra y mathematica. Esto les facilitó la invención de nuevos problemas, además de reflexiones sobre la capacidad del software, y del comportamiento en puntos o intervalos donde alguno de los objetos matemáticos no existían.

Consigna 8: Una generalización

Generalice el problema original de Bartle y Sherbert (2010), de modo que el problema planteado sea solo un caso particular.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

Esta consigna, claramente les exigió un mayor nivel de comprensión, pues se les pidió una generalización, y esto es “hacer matemática”. Se les proporcionó una guía de preguntas para ayudarles en su tarea. Después de mucha discusión en los grupos, y luego a nivel de todo el estudiantado junto con la docente, fueron detallando las características de cada una de las funciones, hasta obtener, con gran satisfacción entre todos, la generalización siguiente:

Generalización del problema original:

Sea g definida en $\mathbb{R}$ por $g(x) := h(x)$ si $x \neq c$ y $g(c) = a$, donde $h(c) \neq a$. Sea $f(x)$ una función continua, invertible $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que h es continua en $f^{-1}(c)$, entonces $\lim_{x \rightarrow f^{-1}(c)} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(f^{-1}(c))$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones?

Pba: $(g \circ f)(x) = \begin{cases} h(f(x)) & \text{si } f(x) \neq c \Leftrightarrow x \neq f^{-1}(c) \\ a & \text{si } f(x) = c \Leftrightarrow x = f^{-1}(c) \end{cases}$

$\lim_{x \rightarrow f^{-1}(c)} g(f(x)) = \lim_{x \rightarrow f^{-1}(c)} h(f(x)) = h(c)$ pues h es continua y h lo es en c .

Pero $(g \circ f)(f^{-1}(c)) = g(f(f^{-1}(c))) = g(c) = a$ y como $a \neq h(c)$

se cumple que $\lim_{x \rightarrow f^{-1}(c)} g(f(x)) \neq (g \circ f)(f^{-1}(c))$.

No contradice el TFC porque este dice que f debe ser cont. en $d = f^{-1}(c)$ y g cont. en $f(d) = c$. Pero aquí g no es cont. en $c = f(f^{-1}(c))$.

Fig 8. Generalización dada por uno de los grupos



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

f) Resultados y consideraciones finales

La introducción de tareas de creación y variación de problemas, logró aumentar la comprensión y rendimiento académico de los futuros profesores, en ambos cursos, independientemente del área (álgebra ó análisis). Comparando con otros ciclos en que la docente impartió los mismos cursos de manera tradicional, la asimilación de los conceptos matemáticos involucrados en estas tareas resultó mucho mejor por haber participado ellos de manera activa. Las tareas sobre la comprensión del enunciado de un problema, definición o teorema y las consecuencias de modificar alguna de sus hipótesis, condujo a una mejor (y rápida) comprensión de las demostraciones formales. Esto se evidenció en los resultados de la prueba escrita realizada.

Por otra parte, se observó una modificación de la actitud de los alumnos respecto a los problemas propuestos en libros de texto, ahora no se limitaban a intentar resolver la tarea propuesta sino que reflexionaban sobre su enunciado, consiguiendo de esta manera una mejor comprensión de la teoría que se tenía que utilizar en su resolución. Se evidenciaron otros logros positivos como el aumento de la motivación de los alumnos, en particular en estudiantes con menor rendimiento y con actitud anterior poco participativa.

Este tipo de tareas, aunque demandaron más tiempo que las explicaciones magistrales de una clase tradicional, permitió después que la comprensión de los temas posteriores consumiera menos tiempo del habitual. Por último, es importante resaltar que este tipo de tareas puede facilitar la transición de las clases formales típicas a otro tipo de clases en las que los alumnos, además de hacer matemáticas, tengan que pensar sobre las matemáticas.



MODELOS FLEXIBLES DE FORMACIÓN: UNA RESPUESTA A LAS NECESIDADES ACTUALES

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bartle, R. y Sherbert, D. (2010). Introducción al análisis matemático de una variable. México: Editorial Limusa Wiley S.A, tercera edición.
- Espinoza, J, Lupiañez, J y Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Vol 14, Marzo 2014.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 9-25.
- Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.
- Malaspina, U. (2013). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *Unión*, 35, 135-143.
- Rubio, N. (2012). *Competencia del profesorado en el análisis didáctico de prácticas, objetos y procesos matemático*. Tesis doctoral no publicada, Universitat de Barcelona, España.
- Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), 499-511.
- Pinter, C. (2010) *A book of Abstract Algebra*. Dover, segunda edición. New York.