



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Induciendo a la formulación de preguntas como producto de conexiones intramatemáticas

Caso particular de conexiones entre el análisis real y el análisis complejo

Salazar Solórzano, Lorena

Universidad de Costa Rica / Universidad Nacional de Costa Rica

Escuela de Matemáticas/ Facultad de Ciencias

Residencial Málaga / Casa 22C / Sabanilla / Montes de Oca / San José

lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr / lorena.salazar.solorzano@una.cr

1. **RESUMEN:** En este estudio se implementan tareas de conexión entre el análisis real y el análisis complejo para desarrollar la competencia de formulación de preguntas en futuros profesores de matemática. Se concluye que el proceso deliberado de comparaciones intramatemáticas favorece la riqueza y alcance de las preguntas planteadas, así como una búsqueda de respuestas a sus propias interrogantes, que refuerza conceptos previos y a su vez logra motivación, expectativa y apertura a recibir conceptos nuevos.
2. **ABSTRACT:** In this study connection assignments are implemented between real analysis and complex analysis to develop the competence of questions in future mathematics teachers. It is concluded that the deliberate process of intra-mathematical comparisons favors the wealth and scope of the questions raised, as well as a search for answers to their own questions, which reinforces preconceptions and in turn achieves motivation, expectation and openness to receive new mathematics concepts.
3. **PALABRAS CLAVE:** Análisis real, variable compleja, creación de problemas, educación matemática, profesores de matemática.

KEYWORDS: Real analysis, complex variable, posing problems , mathematics education, mathematics teachers.

4. DESARROLLO:

Uno de los principales focos de investigación en los últimos tiempos ha sido la formación inicial de docentes de matemática como un medio para lograr una sociedad con capacidad de pensar y razonar matemáticamente (Ball, Thames y Phelps, 2008; Font, 2011; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball, 2008; Silverman, J. y Thompson, 2008). No escapa a esto la



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Universidad de Costa Rica (UCR), en la cual, después de realizar un proceso de autoevaluación de la carrera Enseñanza de la Matemática, ha propuesto un nuevo plan de estudio, a iniciar en el 2017, que busca formar un profesorado competente que mejore sustancialmente la enseñanza de la matemática en Costa Rica y logre implementar, eficientemente, la nueva reforma curricular en Matemática del Ministerio de Educación Pública (MEP 2012). Ante este nuevo reto, los formadores y formadoras de estos grupos profesionales han iniciado una serie de discusiones, seminarios y reflexiones en torno a las prácticas docentes, a la pertinencia de las metodologías empleadas y a cómo mejorar la comprensión de los conceptos matemáticos en las aulas de los futuros docentes.

El plan de estudios actual de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UCR contiene cursos formales de matemática, por un lado, y cursos de pedagogía en paralelo, por otro, sin conexiones entre ellos, por lo que se presenta un divorcio palpable entre las dos áreas de formación. Los cursos de pedagogía se ofrecen en la Facultad de Educación por profesionales que no tienen contacto alguno con los objetos matemáticos, mientras que los cursos de matemática se dan en la Escuela de Matemática, primordialmente, por profesionales en el campo de las “matemáticas puras”, con desconocimiento de teorías didácticas y metodologías de enseñanza. Históricamente, estos cursos se encuentran orientados a la adquisición de contenidos matemáticos, formalistas y rigurosos, dejando de lado otros procesos relevantes necesarios en el quehacer docente. No hay duda de que el conocimiento disciplinar, riguroso y formalista, en el profesorado de matemática es necesario, pero no es suficiente. De acuerdo con Larios y Font (2012, p. 26), “hasta hace un par de décadas la visión predominante era que este aspecto era el necesario y (prácticamente) el suficiente para impartir clases de matemáticas en los niveles medio y superior. Con el paso del tiempo ha quedado en evidencia de que esta visión es más bien corta y que este aspecto no es suficiente para llevar a cabo una enseñanza adecuada”

La National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) indica que se deben tomar en cuenta tanto estándares de contenidos como estándares de procesos tales como resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación. El presente estudio se centra en el proceso de conexión, el cual, como se mencionó anteriormente, se ha dejado de lado en la formación inicial de estos grupos profesionales, con un divorcio innegable entre la pedagogía y la matemática. Más aún, los cursos de matemática se dan también en forma aislada entre las diferentes áreas (álgebra, análisis, geometría, métodos numéricos, tecnologías y otras), con poca o ninguna conexión entre ellas. Ante un problema de análisis, la práctica indica que los alumnos no hacen conexiones con herramientas de álgebra o geometría para resolverlo y viceversa. Pareciera que la formación recibida, con cursos aislados, se traslada a un almacenamiento fragmentado de los conocimientos matemáticos, lo que afecta su comprensión integral. Aunado a esto, la metodología magistral tradicional, donde el estudiantado se limita a copiar de una pizarra, ha dado lugar a personas pasivas, que se cuestionan muy poco sobre los contenidos matemáticos y sobre sus relaciones.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

La formación inicial de docentes de matemática debe desarrollar competencias, no solo en resolución de problemas, sino también en creación de problemas matemáticos o, más específicamente, en el planteamiento de preguntas que generen problemas que respondan a un objetivo específico, dado que deberá formular preguntas deliberadas a sus propios estudiantes. (Malaspina, Font, Ellerton, Salazar). Por esto, en esta investigación se aplica una combinación del proceso de conexión intramatemático con la creación de problemas, más específicamente con el planteamiento de preguntas abiertas. Para ello se eligió, como temática de estudio, las conexiones entre el análisis real con el análisis complejo, induciendo a que fueran el propio estudiantado, quien se cuestionara sobre las diferencias y similitudes entre los conceptos del campo real y el complejo. Se trata de una experiencia en la que se pone énfasis en aspectos que tradicionalmente no se contemplan en los cursos de matemática para profesores y profesoras.

La hipótesis de este estudio es que la combinación de conexiones entre áreas de las matemáticas, junto con preguntas generadoras, logra despertar interrogantes en el estudiantado que le resultan motivantes para recibir conocimiento nuevo. Ante esta situación se formuló la siguiente pregunta y objetivo de investigación:

¿Es posible desarrollar la competencia de formulación de preguntas en estudiantes para profesores (EPP), que a su vez les motive al aprendizaje de conceptos matemáticos, realizando conexiones intramatemáticas?

Objetivo:

Investigar si, después de favorecer el proceso de conexión intramatemático, los EPP logran plantear preguntas, potentes, interesantes y relevantes, que les motiven a la búsqueda de respuestas y a la apertura de nuevos conceptos matemáticos.

METODOLOGÍA

Para el desarrollo de esta investigación, se eligió como contexto de estudio, las conexiones intramatemáticas entre el análisis real y el análisis complejo. Se tomó una muestra de 21 estudiantes del curso MA0610 Introducción a la Variable Compleja de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la UCR. El estudiantado involucrado conocía los conceptos básicos de las funciones reales tanto en una como en varias variables, puesto que ya habían aprobado dos cursos previos de análisis. Para lograr el objetivo de la investigación, se les planteó, al inicio de cada tema, un “problema detonante o “cápsula generadora de preguntas”, que consistió en un enunciado válido en el campo complejo, que provocara impacto y diera origen al planteamiento de preguntas por parte del alumnado, y que además, le resultara suficientemente motivador para despertar el interés por buscar respuestas. El diseño de las



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

cápsulas generadoras se basó en el libro de texto de Zill y Shanahan (2003), quienes hacen comentarios sobre relaciones del análisis real con el análisis complejo. Los estudiantes debían anotar una o varias preguntas que surgieran ante la cápsula inmediatamente después de su lectura, en unas fichas, anónimas, que se les proporcionaron para tal efecto. La docente recogía las fichas y compartía con el resto del grupo, de modo que la totalidad conociera los intereses de sus compañeros y compañeras. Se reorganizaron algunos contenidos del curso, para contestar estas preguntas en el transcurso del semestre. Para la recolección de datos, se acopiaron evidencias escritas por estudiantes (sus preguntas planteadas) y se llevó una bitácora de lo acontecido en el aula. Estas preguntas se analizaron con un enfoque cualitativo.

SUSTENTOS TEÓRICOS

Proceso de conexión

El plan de estudios de matemática vigente para secundaria en Costa Rica señala en sus fundamentos, (MEP, 2012, p. 25), la necesidad de realizar conexiones en el aula de matemática, aludiendo a la forma en que esta disciplina se ha desarrollado históricamente. Pero, ¿qué se entiende por proceso de conexión en matemáticas? Para contestar esto, se debe ir más allá de los estudios matemáticos. Según Waisburd (2009, p. 5), “las ideas originales surgen de establecer nuevas relaciones con ideas existentes, transformando la información establecida o añadiendo detalles a situaciones conocidas, como la codificación, la combinación, la comparación selectiva y requerida en procesos creativos”. Siguiendo a este investigador, se diseñaron tareas de conexión entre el análisis real, cuyos conceptos eran ya conocidos por el estudiantado del estudio, con el análisis complejo, que contenía conceptos nuevos para ellos.

Según (Polya, 1965), hay que imaginar un teorema matemático antes de probarlo e imaginar la idea de la prueba antes de ponerla en práctica. ¿Pero cómo hacerles imaginar posibles teoremas de la nada? En esta experiencia se recurrió al uso de “situaciones generadoras de preguntas”, en las que se les planteaba algún escenario premeditado que les forzara a realizar comparaciones selectivas, de modo que, de manera natural, se preguntaran si un teorema o resultado en particular, válido en el análisis real, se mantenía en el campo de los números complejos; se les incentivaba a imaginar resultados propios y posibles adaptaciones, de forma que cuando vieran un resultado o una prueba, esta les resultara significativa y respondiera a un cuestionamiento previo y a un interés por conocer respuestas.

Sin embargo, la experiencia de muchos años de docencia de la autora de este estudio indica que estas conexiones no se realizan en el estudiantado de manera automática e inmediata. Cuando están frente a un problema de análisis, la práctica indica que no hacen conexiones con herramientas de álgebra o geometría para resolverlo y viceversa. Pareciera que la formación



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

recibida, con cursos aislados de álgebra, análisis, geometría, probabilidad, numérico y otros, se traslada a un almacenamiento fragmentado de los conocimientos matemáticos, lo que afecta la comprensión integral de las matemáticas. La comprensión de conceptos de variable compleja no se logra fácilmente ni intuitivamente, por lo que este estudio buscaba entablar la conexión entre el campo de los números reales y complejos desde el aula, para reforzar conceptos previos del análisis real e introducir conceptos nuevos de las funciones complejas de variable compleja.

Planteamiento de preguntas

Según Waisburd (2009, p. 5), “el arte de hacer buenas preguntas es una herramienta que podemos utilizar para activar el pensamiento creativo como lo son: preguntas provocativas, reflexivas, de comprobación, hipotéticas, justificantes, para una mejor percepción, entre otras”. Todo el personal docente debe ser competente en realizar preguntas efectivas para guiar un discurso hacia un tema nuevo o para recordar conceptos previos. Al respecto, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) clasifica el tipo de preguntas que hace el profesorado, de acuerdo con el objetivo que persiguen: (NCTM 2015, p.14)

- 1) Para recopilación de información: Los estudiantes recuerdan hechos, definiciones o procedimientos.
- 2) Para expolar el razonamiento: Los alumnos/as explican, elaboran o clasifican su razonamiento, lo cual incluye articular los pasos de los métodos de solución o completar una tarea.
- 3) Para hacer evidente las matemáticas: Los alumnos analizan estructuras matemáticas y establecen nexos entre las ideas y las relaciones matemáticas.
- 4) Para incentivar la reflexión y la justificación: Los estudiantes muestran un conocimiento más profundo de sus relaciones y acciones, lo cual incluye construir un argumento para validar su trabajo.

El planteamiento de preguntas está directamente relacionado con la creación de problemas, dado que, por un lado, un problema responde a una pregunta sin respuesta en la que hay un interés por contestar y, por otro, una pregunta da lugar a un problema por resolver. Son varios las investigaciones matemáticas que confieren un papel preponderante a la creación de problemas, tanto así que Ellerton (2013) propone incluir el planteamiento de problemas en la formación inicial del profesorado de matemática. Malaspina (2013) señala que el planteamiento de problemas contribuye al desarrollo del pensamiento matemático al brindar oportunidades para examinar generalizaciones e iniciarse en la investigación y en el hacer matemáticas. En Salazar (2014a) y Salazar (2014b) se reportan algunas experiencias en las que se indujo a estudiantes para futuros profesores y profesoras a crear problemas en temas



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

de matemática formal de nivel de educación superior, específicamente en temas de análisis real y álgebra abstracta. Sin embargo, en tales estudios, se le guía a plantearse problemas o preguntas iniciando con variaciones a un problema dado; cambiando los requerimientos, datos y cuestionando qué pasa si alguna hipótesis no se cumple. Estas creaciones de problemas son enmarcados alrededor de un objetivo específico, por lo que resultan preguntas que se podrían catalogar como “preguntas cerradas” o “preguntas guiadas”. En esta investigación se induce a los futuros grupos docentes a crear o plantear “preguntas abiertas”, entendiéndose estas como aquellas interrogantes que no están enmarcadas o delimitadas a un problema específico, sino que pueden orientarse a lo que deseen o tengan interés en conocer. Este abordaje es respaldado por algunos investigadores como Mallart, Font y Malaspina (2015), quienes señalan que el estudiantado debería realizar conjeturas matemáticas, generalizaciones y extensiones de problemas, proponiendo preguntas emergentes para implicarse más extensivamente en la resolución de problemas, ayudar a desarrollar modelos mentales, modelar los fenómenos y aplicar varias representaciones. Así mismo, la NCTM propone el planteamiento de preguntas deliberadas como una de las ocho prácticas para evaluar y mejorar el razonamiento estudiantil de manera que le dé sentido a ideas y relaciones matemáticas. Recomienda, además, que docentes y estudiantes deben plantearse y responderse preguntas como:

“¿Qué matemáticas se están aprendiendo? ¿Por qué esto es importante? ¿Cómo se relaciona esto con lo que ya he aprendido? ¿Hacia dónde se dirigen estas ideas matemáticas?” (NCTM, 2015, p. 10).

Las clases de matemática para la formación del profesorado, que usualmente son formales, rigurosas y cargadas de teoremas con sus demostraciones, deben ser cristalinas, deben indicar el objetivo, hacia dónde se va, cómo se llegará y por qué. Es importante señalarles esa luz al final del camino, anticipando el resultado al cual se quiere llegar y el que le da sentido a todos los pasos previos necesarios que les conducirá a dicho resultado. De lo contrario, se pueden perder en ese trayecto, perdiendo además el interés por la clase. El planteamiento de constantes preguntas facilita este proceso y esto podría resultar mucho mejor si es el mismo estudiantado quien se plantea sus propias preguntas.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

La experiencia inició con una actividad que pretendía diagnosticar el nivel de preguntas de los estudiantes involucrados en el estudio.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Cápsula generadora de preguntas: ¿Qué similitudes y diferencias creen que existen entre el análisis complejo y el real? ¿Qué preguntas quisieran responderse en este curso? ¿Qué propiedades de las funciones reales creen que se trasladan a las complejas?

De acuerdo a la clasificación por niveles, (figura 7.1), que establecen Hufford-Ackles, Fuson y Sherin (2014), mencionado por la NCTM (2015, p.33), pudo constatarse que, en cuanto a planteamiento de preguntas, los estudiantes se hallaban en un nivel cero al inicio del curso dado que solo la docente preguntaba y obtenía respuestas breves con poco interés y riqueza en sus cuestionamientos. A medida que se fueron exponiendo las cápsulas generadoras de preguntas, fueron aumentando a un nivel superior.

Cápsula generadora de preguntas: Una función compleja de variable compleja consiste en un par de funciones reales de dos variables reales $z = u(x,y) + i v(x,y)$. De modo que para graficarla se requieren cuatro dimensiones, dos para cada variable compleja, la independiente y la dependiente usándose dos planos complejos separados, uno para representar el dominio y otra para representar las imágenes. A esto se le llama mapeo en lugar de gráfica.

Esto generó preguntas con un interés en que se les diera respuestas pasivamente. Algunas de ellas se muestran a continuación.

Preguntas creadas por los estudiantes: ¿Cómo son las funciones complejas? ¿Tienen una parte real y otra imaginaria? ¿Cómo se grafican las funciones complejas? ¿Hay algún software para graficar funciones complejas? ¿Tienen ceros o raíces? ¿Las funciones complejas se parecen a las funciones de dos variables? ¿También hay funciones trigonométricas complejas? ¿Y exponenciales? ¿Para qué sirven las funciones complejas? ¿Vamos a ver como un cálculo, pero en funciones complejas?

Cápsula generadora de preguntas: En el análisis real la derivada de una función en un punto tiene varias interpretaciones: como la pendiente de una recta tangente, como una razón de cambio instantánea o como una velocidad; en el análisis complejo no se tiene ninguna de estas interpretaciones.

Esto logró llamar la atención de los estudiantes, hubo rostros de sorpresa e interés, y la mayoría de los estudiantes coincidieron en la pregunta: ¿Y entonces cómo se interpreta la derivada de una función compleja?

La cápsula de figura 7.2 causó impacto y emergieron algunas preguntas con un interés mayor a buscar respuestas. No lograban entender como funciones tan simples como la identidad o la función que eleva al cuadrado son derivables en $\mathbb{R}$ pero no en $\mathbb{C}$. Así mismo, la siguiente cápsula (figura 7.3) generó mayor incredulidad, pues polinomios en $\mathbb{C}$, no se logran derivar con las reglas de suma, multiplicación y división, como se hace tan fácilmente con las funciones reales. Paulatinamente el nivel de preguntas, en número y calidad, fue aumentando. La



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

cápsula en figura 7.4, señala que si una función es derivable en un punto en $\mathbb{C}$ entonces es infinitamente derivable en dicho punto, muestra una de las mayores fortalezas de las funciones complejas con respecto a las reales. Esto les indujo a realizar conexiones con desarrollos de Taylor y regla de L'Hospital ante este poderoso hecho.

Continuando con este tipo de cápsulas generadoras de preguntas, surgieron una lluvia de preguntas relevantes en temas del análisis complejo (figura 7.5), cada vez menos simples y con mayor participación de los estudiantes y no solo de algunos de ellos, que abonaron el terreno para que la docente desarrollara el tema con un auditorio mucho más receptivo y expectativo. Se dieron expresiones sobre el querer conocer más sobre ese campo misterioso y poderoso, el campo complejo. En figura 7.6 puede observarse una de las opiniones de una estudiante.

CONSIDERACIONES FINALES

La experiencia arrojó resultados positivos. Entre ellos destaca la motivación de los estudiantes, la cual fue muy superior a la presentada por algunos de ellos en cursos previos que habían llevado con la misma docente. Otro de los aspectos a destacar es que los alumnos con menor rendimiento y que habían tenido una actitud poco participativa en cursos anteriores, mostró mayor frecuencia de intervenciones verbales con estas actividades y mejoraron sustancialmente sus notas en evaluaciones escritas. La introducción de cápsulas generadoras de preguntas produjo interés y expectativa de los participantes por aprender el análisis complejo. De acuerdo a la tabla de planteamiento de preguntas (figura 7.1), se logró llevar a todos los estudiantes a un nivel 2 y algunos de ellos a un nivel 3. Una gran mayoría de preguntas fueron del tipo “¿por qué?” exigiendo una justificación. Realizar comparaciones selectivas entre las propiedades y conceptos de límites, derivadas e integración en funciones reales y funciones complejas, resultó ser una metodología innovadora para abordar conocimientos nuevos (los de variable compleja) y reforzar los previos (conceptos de análisis real). Se recomienda inducir a conexiones intramatemáticas en EPP desde los primeros cursos de su formación, para que luego ellos lo hagan solos.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

4.1. FIGURA O IMAGEN 1

Niveles de logro en el planteamiento de preguntas

- | | |
|---------|--|
| Nivel 0 | El docente es el único que pregunta. Las preguntas sirven para que los alumnos escuchen al profesor. Los estudiantes dan respuestas breves y solo responden al maestro. |
| Nivel 1 | Las preguntas del docente empiezan centrándose en el pensamiento del estudiante y en menor medida en sus respuestas. Solo el docente plantea preguntas |
| Nivel 2 | El docente plantea preguntas exploratorias y promueve que haya cierto diálogo entre estudiantes. Ellos se plantean preguntas entre sí con el asentimiento del profesor. |
| Nivel 3 | El diálogo entre estudiantes lo inician ellos mismos. Plantean preguntas y escuchan las respuestas. Muchas preguntas son del tipo “¿por qué?” y exigen una justificación. Las preguntas del docente tal vez guíen el discurso. |

Fuente: NCTM (2015, p. 33)

4.2. FIGURA O IMAGEN 2

Cápsula generadora de preguntas

- La función real de variable real $f(x) = x$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, pero $f(z) = x = \operatorname{Re} z$, donde $z = x + iy$, no resulta ser diferenciable en ningún punto.
- La función real de variable real $f(x) = |x|^2$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}$, mientras que $f(z) = |z|^2$, donde $z = x + iy$, resulta ser diferenciable solamente en $z=0$, por lo tanto f no es analítica en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Algunas preguntas planteadas por los estudiantes:

¿Qué significa ser diferenciable en $\mathbb{C}$? ¿Ser derivable no es lo mismo que diferenciable?
¿ $f'(z)$ no es $2|z|$? ¿Por qué $f(z) = |z|^2$ si es diferenciable en $z = 0$? ¿Cómo se ve esto gráficamente?

4.3. FIGURA O IMAGEN 3

Cápsula generadora de preguntas

Las siguientes funciones complejas de variable compleja

$$f(x + iy) = 4x^2 - iy \quad \text{y} \quad g(x + iy) = xy + i(x + y)$$

son derivables en $\mathbb{C}$, pero sus derivadas no pueden obtenerse por medio de las reglas de la suma, producto de derivadas.

Algunas preguntas planteadas por los estudiantes:

¿Son polinomios complejos? ¿Cómo se derivan las funciones en $\mathbb{C}$? ¿Existen reglas de derivación? ¿Por qué no se pueden usar reglas?



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

4.4. FIGURA O IMAGEN 4

Cápsula generadora de preguntas

- En $\mathbb{R}$ si una función tiene derivada en un punto, no hay ninguna garantía de que sea dos veces derivable en dicho punto, mientras que en $\mathbb{C}$, si una función es analítica en un dominio D , entonces es infinitamente derivable en todo punto de D .
- Una función f es analítica en un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si tiene una representación en series de Taylor en una vecindad de x_0 , mientras que una función es analítica en $z_0 \in \mathbb{C}$ si es derivable en z_0 y en una vecindad alrededor de z_0 . ¿Por qué esas definiciones en realidad no son tan diferentes?
- En $\mathbb{R}$ es posible aplicar la regla de L'Hospital varias veces para hallar un límite. En $\mathbb{C}$, si las primeras $n-1$ derivadas de f y g son cero y si $g^{(n)}(z_0) \neq 0$, entonces

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{g^{(n)}(z_0)}$$

4.5. FIGURA O IMAGEN 5

Otras preguntas creadas por los estudiantes

¿Cómo se calculan los límites de funciones complejas? ¿Cómo se pueden ilustrar?

¿Se puede usar epsilon y delta? Si el campo de los complejos no tiene un orden, ¿cómo se puede hablar de aproximación? ¿Y existen límites que tienden a infinito? ¿Y de los que tienden a un número cuando x tiende a infinito? ¿Cómo se representan?

¿Existen asíntotas horizontales? ¿Y asíntotas verticales? ¿Se vale el teorema de compresión o del encaje para límites?

¿Cómo se define una función compleja continua? Una función continua en $\mathbb{R}$ gráficamente no tiene huecos ni saltos, ¿pasa lo mismo con funciones complejas?

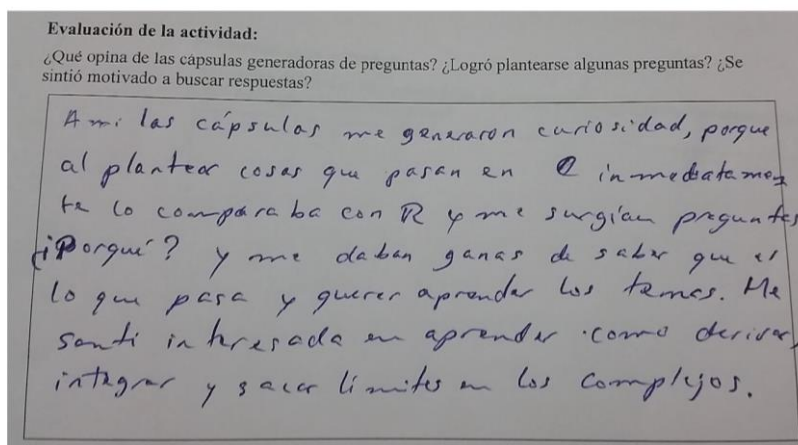
¿Se puede usar la regla de la cadena en $\mathbb{C}$? ¿Se usan los resultados de derivación para graficar funciones? ¿No se puede decir que si la derivada es positiva, la función crece? ¿Y hay resultados similares al teorema del valor medio?

¿Cómo se integran las funciones complejas? ¿Se cumple el teorema fundamental del cálculo? ¿Y el del álgebra? ¿Hay diferentes técnicas para integrar? ¿También hay integrales dobles y triples? ¿Se puede calcular el área de una función compleja con integración?



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

4.6. FIGURA O IMAGEN 6



5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 9-25.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. y Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26(4), 430-511.

Larios, V., Font, V., Spíndola, P., Sosa, C., Giménez, J. (2012). El perfil del docente de Matemáticas. Una propuesta. *Eureka*, 27, 19-36.

MEP(2012). Ministerio de Educación Pública. Programa de estudio en matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica

Malaspina, U. (2013). Nuevos horizontes matemáticos mediante variaciones de un problema. *Unión*, 35, 135-143.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Mallart, A, Font, V. & Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos* vol. XXXVIII, núm. 152, pp 1430.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Va: (Trad. Castellana, Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales 2003).

National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *De los principios a la acción para garantizar el éxito matemático para todos*. ISBN 978-087353-774-2. Editando libros S.A.

Salazar, L (2014 a). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de

texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma* vol XXXV (1) junio 2014 V-2.

Salazar, L (2014 b). Creación de problemas: un método alternativo para introducir y reafirmar el concepto de grupo. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*.

Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), 499-511.

Waisburd, G. (2009) Pensamiento creativo e innovación. *Revista Digital Universitaria*. Vol. 10 Número 12. Diciembre, 2009.

Zill, D y Shanahan, P (2003). *A first course in Complex Analysis with applications*. Jones and Bartlett Publishers, Inc. Canada.