



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Creación de problemas mediante un proceso guiado de cuatro etapas

Una propuesta para profesores de matemática en formación

Salazar Solórzano, Lorena

Universidad de Costa Rica / Universidad Nacional de Costa Rica

Escuela de Matemáticas/ Facultad de Ciencias

Residencial Málaga / Casa 22C / Sabanilla / Montes de Oca / San José

lorena.salazarsolorzano@ucr.ac.cr / lorena.salazar.solorzano@una.cr

1. **RESUMEN:** Este artículo reporta los resultados de un estudio en el que se implementaron 4 fases estratégicas para desarrollar la competencia de creación de problemas en futuros profesores de matemática: análisis de enunciados, variación de problemas, invención de problemas propios, evaluación por pares y mejoras de los problemas creados. Dos experiencias de aula dan indicios de que este proceso, junto con la reflexión didáctica en cada etapa, da lugar a una mejora en la invención de nuevos problemas.
2. **ABSTRACT:** This article reports the results of a study in which 4 strategic phases to develop the competence in creating problems in future mathematics teachers were implemented: analysis of statements, variation of problems, inventing own problems, peer review and improvement of the problems created. Two classroom experiences give evidence that this process, together with the didactic reflection at each stage, results in an improvement in inventing new problems.
3. **PALABRAS CLAVE:** Creación de problemas, profesores de matemática, formación inicial, educación matemática.

KEYWORDS: Posing problems, mathematics teachers, initial training, Mathematics education.

4. DESARROLLO:

Los nuevos currículos de matemática para secundaria en Costa Rica, aprobados en el 2012 y ejecutados plenamente en todos los niveles hasta el 2016, declaran la resolución de problemas como el enfoque principal de enseñanza. Esto ha generado una demanda nacional en las universidades costarricenses que exige cambios en la formación inicial de los



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

educadores. “Una de las tareas profesionales del profesor de matemáticas es proponer problemas a sus alumnos; éstos pueden haber sido creados por otros, pueden ser modificaciones que el profesor hace de problemas que fueron elaborados anteriormente, e incluso pueden ser creados por él mismo. El profesor es el que mejor conoce la realidad de su aula, y por ello es el único que puede calibrar adecuadamente los estímulos y retos que puede plantear a sus alumnos.” (Mallart, Font, Malaspina, 2016, p. 15). Es por esto que se requieren docentes competentes tanto en resolución de problemas como en creación de problemas (CP). Sin embargo, la formación inicial de estos profesionales en los centros de educación superior se ha centrado históricamente en resolver problemas y no se les involucra en actividades en las que ellos por sí mismos, deban plantear algunos, o realicen al menos algunas variaciones a problemas y ejercicios dados. Mallart, Font y Malaspina (2016) comentan que los alumnos tienden a asumir que ellos siempre dispondrán de otras fuentes (libros de texto o Internet) para proveerse de problemas para plantear a sus futuros alumnos. Esto ha dado lugar a un profesional con poca capacidad de creación que se limita a escoger uno o varios libros de texto de editoriales comerciales para obtener de ahí problemas planteados por matemáticos puros, investigadores u otros profesionales desligados de la educación secundaria, lamentablemente des-contextualizados y ajenos a la realidad de los estudiantes a los que se les aplicarán.

Por otro lado, investigaciones en CP indican que los futuros docentes carecen de habilidades necesarias para crear problemas, como Singer y Voica (2013), los cuales reportan un estudio sobre planteamiento de problemas con profesores de matemática en la que consideraron tres aspectos: claridad, coherencia y originalidad. Estos autores indican que 17 % de los problemas creados, eran incompletos, 8% estaban incorrectos y la mayoría de ellos (70%) no eran interesantes según los expertos consultados. Por otro lado, Tichá y Hošpesová (2013) concluyen que los enunciados propuestos por futuros maestros de primaria, revelaron deficiencias en la comprensión del tema mismo tratado (fracciones). Otros investigadores como Grundmaier (2015) reportan resultados mas alentadores. Al darles un conjunto de condiciones a EPP para que libremente plantearan problemas en un curso de matemática durante un semestre, de los 90 problemas planteados, 96.7% eran solubles, 87.4% contenían suficiente información y 80.3% requerían soluciones de varios pasos para su solución. Esto necesariamente lleva a otro cuestionamiento: ¿cuándo y bajo qué condiciones podría considerarse un problema ser un “buen problema”? Mallart, Font y Malaspina (2016) consideran que un “buen problema” es aquel que satisface criterios como los siguientes: la dificultad no es muy grande y se percibe una solución alcanzable, los contenidos que se tratan y/o las estrategias resolutivas se conocen, resulta claro en qué consiste el problema (determinar o demostrar algo), se intuye un camino para obtener la solución o conjeturar una solución, permite hacer verificaciones para mantener o rechazar las conjeturas, permite establecer conexiones ya sea entre varios temas matemáticos con situaciones reales o con otros campos del conocimiento.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

El “arte de inventar”, van más allá del hecho de crear problemas interesantes a los alumnos a los que van dirigidos. Deben responder a un objetivo y a un nivel de complejidad adecuado. Autores como Ellerton, (2013), Grundmaier (2015), Malaspina (2013), Salazar (2014 a) y Salazar (2015), señalan que los futuros profesores deberían como mínimo realizar variaciones de un problema dado. Grundmaier (2015), quien reporta una experiencia con estudiantes para primaria y secundaria de matemática indica que la habilidad de crear problemas y la creatividad deben desarrollarse en los cursos de matemática de los futuros profesores y que esto no demanda gran cantidad de tiempo al instructor en la confección y diseño de las tareas y materiales. En Salazar (2014 a) y (2014 b) se muestran algunas experiencias de aula con estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática tanto de la Universidad de Costa Rica (UCR) como de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA) en donde la estrategia de CP resultó ser una actividad muy productiva para la comprensión y aprendizaje de algunos temas de análisis y álgebra. Señala además que para inventar un problema matemático, se debe tener la teoría involucrada muy clara y si no se tiene clara, es un medio de aclarársela en el proceso de la misma creación, indagando en las posibles soluciones que un segundo individuo podría dar, dirigiendo su atención a los detalles e hipótesis. Esta autora recomienda la CP como una estrategia didáctica para lograr conocimiento matemático y concluye que debería ser parte de la formación inicial de profesores de matemática. Esto es respaldado por Espinoza, Lupiañez y Segovia (2014), quienes señalan que la invención de problemas es una ventana para observar la comprensión matemática, ya que puede ser una herramienta para evaluar el aprendizaje de conocimientos matemáticos de los estudiantes y también mejora su disposición y actitudes hacia las matemáticas. Sin embargo, la competencia de CP no se logra espontáneamente en los futuros profesores de matemática, es una tarea que requiere práctica y estrategias para su desarrollo. Es por esto que surge la pregunta de investigación:

¿Es posible desarrollar la competencia de CP en EPP mediante un proceso guiado en el que a su vez los alumnos aprendan conceptos matemáticos?

Malaspina (2015) ha desarrollado talleres para en los que aplica 5 fases: en la primera hace una breve exposición sobre CP y las partes de un problema (información, requerimiento, contexto y entorno matemático); en la segunda, les expone un ejemplo de un problema dentro de un episodio concreto, en la tercera fase les pide resolver el problema de la etapa anterior, y les pide que hagan, en forma individual, modificaciones al mismo que faciliten la solución del problema original (“problema pre”) para luego ponerlos a que creen un problema con mayores potencialidades (“problema pos”); en la cuarta etapa les solicita que en grupos resuelvan los problemas creados y el de otro grupo, y finalmente, en la última fase, le solicita que socialicen los resultados. Milinkovie (2015) propone realizar transformaciones a un problema dado para desarrollar la habilidad de CP: transformando el espacio o contexto del problema, variando los elementos conocidos y desconocidos del problema y cambiando la representación del mismo. Las etapas propuestas en esta investigación, se fundamentan también en la variación de problemas para paulatinamente crear nuevos, pero se implementan como una



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

metodología de enseñanza en los cursos de matemática formal de los EPP y se busca desarrollar no solo la competencia de CP, sino también la asimilación de los conceptos matemáticos involucrados. Cabe destacar que hubo dos experiencias previas que ayudaron a delimitar las etapas a seguir (I y II ciclo del 2013) y reportadas en Salazar (2014) y Salazar (2015), en las que, aunque se usaron algunas de las etapas mencionadas, éstas aún no se tenían claramente definidas. Después de observaciones y análisis del proceso seguido por los estudiantes al crear sus problemas en dichas experiencias, surgió la propuesta de las siguientes 4 fases en el marco de esta investigación, cuyo propósito fue el siguiente:

Objetivo: Investigar el efecto que produce, tanto en el desarrollo de la competencia de CP en EPP como en la asimilación de conceptos matemáticos, la incorporación de un proceso guiado de 4 etapas estratégicas: análisis de enunciados de problemas, variación de problemas, invención de problemas propios, evaluación y mejora de los mismos.

METODOLOGÍA: Para este estudio se adopta el concepto de "problema propuesto" dado por Grundmaier (2015, p. 414), entendiéndose como cualquier propuesta escrita por los estudiantes que tenga una solución admisible y que responde a una tarea de planteamiento de problemas, no necesariamente tiene que ser un problema matemático en el sentido didáctico estricto. Es importante aclarar también que el nivel de algunos de los ejercicios planteados en el libro de texto usado (Bartle, 2010), son considerados, en el contexto de este estudio, verdaderos problemas matemáticos para el estudiante, dado que su solución requiere mucho más que aplicar algoritmos o precedimientos, involucrando más bien, demostraciones matemáticas formales.

Contexto del estudio: Se usó una muestra de 39 EPP, quienes estaban llevando, con la misma docente quien a su vez es la investigadora, un curso en paralelo de análisis real tanto en la UCR como en la UNA en el II ciclo del 2015. Este es un curso de matemática del III año del plan de estudios con un alto grado de formalidad matemática con pruebas rigurosas de los principales teoremas y usualmente tiene muy bajas promociones.

Tratamiento instruccional: Con el propósito de prepararlos para la actividad y que se concientizaran de las potencialidades del planteamiento de problemas, se les asignó 2 lecturas (Malaspina (2013), Singer y Voica (2013)) sobre CP. También se les dejó la tarea de investigar sobre algunos criterios para calificar un problema como un "buen problema matemático". La experiencia se desarrolló en 3 sesiones: la primera para discutir las lecturas y determinar los criterios de calidad para un "buen problem" y dos sesiones más de 2 horas, para trabajar las fases de CP propuestas. La actividad se realizó en grupos de dos a tres personas y se les permitió terminar la tarea fuera de clases en caso necesario. Cada una de las etapas se complementó con discusiones y reflexiones dentro del aula, con el objetivo de hacerlos concientes de su rol futuro de docentes en los que deberán tomar decisiones didácticas y metodológicas para enseñar a sus propios estudiantes. Las etapas seguidas se describen a continuación:



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Fase 1 Análisis de enunciados de ejercicios de libros de texto e intención del autor: En esta etapa se les solicita a los estudiantes leer y reflexionar sobre los enunciados de problemas y ejercicios propuestos en libros de texto, y sin resolverlos, conjeturar sobre la intención del autor al plantearlos.

Fase 2 Modificación de problemas y ejercicios propuestos en libros de texto: En esta fase se les pide realizar pequeñas variaciones a algunos de los problemas de la etapa anterior, cambiando algunas hipótesis, o modificando algunos de los requerimientos.

Fase 3 Evaluación y mejoramiento de los problemas propuestos: En esta fase se les solicita que evalúen en pares los problemas de los compañeros adjudicándole una escala de Lickert de 1 a 3, usando los criterios de calidad que ellos mismos consensuaron a nivel de todo el grupo.

Fase 4 Creación de problemas que respondan a un objetivo dado: Esta etapa es sin duda la de mayor producción, en ella se solicita al EPP plantear problemas, que aunque pueden estar relacionados con los de la fase anterior, se requiere un mayor nivel de complejidad, como generalizaciones del problema original o relacionados al mismo.

Recolección de información: Se usó un diario donde se fue anotando todo lo que fue ocurriendo en el aula, comentarios, expresiones y tiempo de ejecución de las tareas. Se recogieron evidencias escritas por los grupos de trabajo. En algunos casos, ante algunos de los problemas creados, se complementó con entrevistas para determinar que pensaba el grupo en su formulación y qué etapas les ayudó más para plantear su problema.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

En la primera sesión se les asignó una página de ejercicios del libro de texto del curso, Bartle & Scherbert (2010), relacionado a algún tema que ya hubiera sido cubierto y que estaba pendiente de ser evaluado en un examen. La tarea consistió en analizar los problemas ahí planteados y sin resolverlos, leer el mensaje y objetivo del autor al plantearlo. Luego debían seleccionar uno de ellos, resolverlo e iniciar con la etapa 2, hacer variaciones al problema escogido. En la segunda sesión debían realizar la etapa 3, evaluar los problemas propuestos por los otros grupos de trabajo y en la última fase, plantear un problema propio, tarea que podían terminar la tarea fuera de clase, dado que esta es la de mayor complejidad. Los criterios seleccionados, después de hacer búsquedas en la web y realizar entrevistas a profesores de matemática con amplia experiencia, fueron:

Redacción y coherencia: uso de un lenguaje claro, sencillo, preciso, sin ambigüedades e información extra y que es familiar al estudiante.

Relación con la teoría: es coherente con la materia y objetivo planteado, se adapta al nivel de los estudiantes al que va dirigido.

Grado de desafío e interés: resulta ser un reto al estudiante, es interesante, atractivo y contextualizado a sus intereses.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

Procesos de pensamiento matemático: es un problema original que logra reforzar los procesos matemáticos de razonamiento, argumentación, reflexión y comunicación.

Se usó además una escala de Likert de 1 a 3, donde estos significan que: (1) el problema presenta el criterio mencionado muy pobremente; (2) el problema logra el criterio parcialmente pero debe mejorarse y (3) si el problema presenta el criterio satisfactoriamente. A continuación se comentan los resultados de dos los grupos de trabajo.

En figura 4.1 se resume el trabajo de uno de los grupos, quienes escogieron el teorema de composición de funciones continuas (TCFC). Se presenta el problema original del Bartle, las variaciones realizadas por los estudiantes y las evaluaciones del resto del grupo basándose en los criterios mencionados anteriormente. Varios de los problemas propuestos no aclaran que f y g son funciones ni sus dominios, por lo que obtienen un puntaje de 2 puntos en redacción. El problema 1 aunque aparentemente se trata de un par de funciones continuas que no presentan gran interés ni desafío para un estudiante, más que reforzar el TCFC, sí toma en cuenta que f tenga valores positivos, para que la función logaritmo esté bien definida, por lo que los estudiantes le dieron un punto en originalidad. Los problemas 2 y 3 presentan un grado mayor de complejidad y razonamiento por cuanto lleva a revisar la definición de la composición y a la reflexión sobre la existencia de objetos matemáticos, pues aquí la igualdad no se cumple por cuanto uno de los objetos no existe (logaritmo no está definida en cero). Los problemas 4 y 5 obtuvieron un puntaje mayor pues presenta un mayor desafío al estudiante porque la pregunta, a diferencia de los anteriores está planteada en forma interrogativa, aspecto que lleva a los estudiantes a cuestionarse si esto será cierto no, buscando casos particulares y activando los procesos matemáticos de razonamiento y argumentación. Por otro lado el tipo de discontinuidad inevitable presentados en los problemas 6 y 7 dan mayor interés al problema original puesto que la discontinuidad es inevitable, contrario al problema original que se trataba de una discontinuidad evitable. Finalmente al final de la figura 4.1, se presenta la respuesta a la fase 4, una generalización al problema original, con un nivel de complejidad suficiente, que podría reformarse a un teorema, mostrando una comprensión profunda del TCFC.

Por otro lado, en las figuras 4.2 a 4.5, se expone el trabajo de otro de los grupos en sus 4 etapas tomando como base los problemas 12,13 y 14 del Bartle & Scherbert (2010, p.158). En la figura 4.2 puede observarse como los alumnos en la primera fase clasifican los problemas como teóricos o de aplicación. Otros fueron catalogados como "calculeros", refiriéndose a ejercicios en los que se requieren procedimientos conocidos para su solución. En figura 4.3 se muestran diferentes variaciones al problema 12, primero con una variación que pasa de un límite positivo a uno negativo, luego continúan modificando hacia un límite al infinito. Como puede observarse en figura 4.3, no podría indicarse en qué momento se dio el salto entre esta fase y la siguiente, puesto que a medida que avanzaban, fueron haciendo variaciones a sus propias variaciones, dando lugar a problemas cada vez más complejos. En la tercera etapa,



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

figura 4.4, este grupo plantea un problema interesante con varias de estas modificaciones incorporadas, pero su redacción está confusa, pide varias cosas a la vez sin un orden. Es por esto que en la cuarta fase, después de que otro grupo les evaluara su problema y se dieran, a nivel de todo el alumnado, ricas reflexiones en torno a lo que debe ser un “buen problema”, le realizan una mejora sustancial, como puede verse en figura 4.5. Finalmente, la figura 7.6 muestra uno de los comentarios de la actividad.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

A continuación se presentan los principales resultados de la aplicación de estas 4 fases estratégicas para la CP. El análisis de enunciados de problemas de libros de texto, dio al estudiante la visión de detalles que antes pasaban desapercibidos por enfocarse en resolverlos. Esto les reforzó la teoría involucrada, puesto que lograron cubrir mayor cantidad de problemas que si se hubieran detenido a ir resolviéndolos uno por uno, sin conexiones entre unos y otros como usualmente hacían antes de la actividad. Se percataron de que el autor tiene un objetivo al plantear cada uno de los problemas y que incluso el orden en que se los presenta, tiene un propósito, según algunos comentarios. Las tareas de variación de problemas resultó ser una fuente viable y rápida de generar nuevos problemas, dado que estas dieron lugar a variaciones de las variaciones previas, que lograron desembocar en problemas con mayores potencialidades que el problema original. La fase de evaluación en pares de los problemas resultó ser muy positiva, dado que al calificar el trabajo de sus compañeros, se empoderaron de los criterios de calidad establecidos en conjunto, lográndose un mayor beneficio que si la docente hubiera sido la evaluadora, según sus comentarios. Esto les ayudó a superar algunas de las limitaciones presentadas en las primeras propuestas y a mejorar la competencia de CP, mostrando más cuidado en la redacción, buscando lograr el objetivo a enfatizar con el problema, llamando la atención a una hipótesis en particular y se volvieron más suspicaces al detectar detalles que antes pasaban desapercibidos. La última fase de CP, resultó ser relativamente pobre, con problemas sin gran originalidad, a excepción del grupo de la figura 4.1 que si hace un planteamiento sustancial.

CONCLUSIONES

Con respecto al objetivo de la investigación planteado, se concluye que la experiencia arrojó algunos indicios de que la incorporación de este proceso guiado de 4 etapas estratégicas: análisis de enunciados de problemas, variación de problemas, evaluación y mejora de los mismos e invención de problemas propios, junto con la reflexión didáctica en cada una de ellas, da lugar a una mejora paulatina en la invención de nuevos problemas, al menos en forma grupal. No hay evidencias de que se logre lo mismo en forma individual. Se logró una mayor comprensión de los conceptos matemáticos involucrados. Los resultados de un quiz que evaluó los temas involucrados fueron superiores, en ambos grupos, a los obtenidos en temas en las que no se aplicaron estas actividades.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

4.1. FIGURA O IMAGEN 1

Problema Original: (Bartle, 2010) Sea g definida en $\mathbb{R}$ por $g(1) = 0$ y $g(x) = 2$ si $x \neq 1$, y sea $f(x) = x + 1 \forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(0)$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones?					
Modificaciones del problema original	Redacción	Teoría	Desafío	Procesos	Nota
Problema 1: Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $f(x) = x^2 - x + 1$ y $g(x) = \ln x$. Pruebe que $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$, $\forall c \in \mathbb{R}$	3	2	2	1	9
Problema 2: Sean $g(x) = \ln x$ y $f(x) = x + 1$. Justifique por qué se cumple que $\lim_{x \rightarrow -1} (g \circ f)(x) = g(f(-1))$	2	3	3	3	9
Problema 3: Sea $g(x) = \sqrt{x}$ y $f(x) = x^2 - x$. Determine los valores de $x = c$ para los cuales se da la igualdad $\lim_{x \rightarrow c} (g \circ f)(x) = g(f(c))$	2	2	2	3	9
Problema 4: Sea $g(x) = \sin(x)$ y $f(x) = \frac{1}{x}$. Justifique que $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) \neq g(f(0))$	2	3	2	3	10
Problema 5: Sea $f(x) = \lfloor x \rfloor$ y $g(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. Determine si puede afirmarse que $\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x) = g(f(1))$	2	3	2	3	10
Problema 6: Sean $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ y $g(x) = 2$, si $x \neq 0$, $g(0) = -1$. ¿Se cumple $\lim_{x \rightarrow 0} (g \circ f)(x) = g(f(0))$?	2	3	3	3	10
Generalización del problema original: Sea g definida en $\mathbb{R}$ por $g(x) = h(x)$ para $x \in c$ y $g(x) = a$, donde $h(c) \neq a$. Si $f(x)$ es una función continua, invertible $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que h es continua en $f^{-1}(c)$, entonces $\lim_{x \rightarrow f^{-1}(c)} (g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(f^{-1}(c))$. ¿Por qué este hecho no contradice el teorema de composición de funciones continuas?					

4.2. FIGURA O IMAGEN 2

12. Supóngase que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, donde $L > 0$, y que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \infty$. Si $L = 0$, demostrar por un ejemplo que esta conclusión no se puede cumplir.	Este es un ejercicio teórico porque uno tiene que saberse muy bien las definiciones y teoremas. El autor nos quiere decir que infinito por un número positivo es infinito, pero que infinito por cero no está definido. Como que se cumplen las reglas de signos $+\times = +$.
13. Encontrar las funciones f y g definidas en $(0, \infty)$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} (f - g) = 0$. ¿Puede el lector encontrar dichas funciones con $g(x) > 0 \forall x \in (0, \infty)$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = 0$?	Este es un problema de encontrar un ejemplo. Nos dice que aunque infinito menos infinito no es cero, hay casos en el que se cumple aunque no se de en general.
14. Sean f y g definidas en (a, ∞) y supóngase que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow \infty} f \circ g = L$.	Este es también un problema teórico pues combina varias definiciones con el teorema de composición de funciones. Nos dice que un puede meter el límite dentro de la composición, como pasa con límites corrientes finitos.

4.3. FIGURA O IMAGEN 3

Fase 2: Realice variaciones al problema 12 de la fase 1.	
Variación 1: Supóngase que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, donde $L < 0$, y que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = -\infty$. ¿Y si $L = 0$?	
Variación de la variación 1: Supóngase que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$, donde $L < 0$, y que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x) = \infty$. ¿Y si $L = 0$?	
Variación 2: Supóngase que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, donde $L > 0$, y que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$. ¿Será cierto que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = \infty$? ¿Y si $L < 0$? ¿Y si $L = 0$?	
Variación de la variación 2: Supóngase que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, donde $L > 0$, y que $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$. ¿Será cierto que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)g(x) = \infty$? ¿Y si $L < 0$? ¿Y si $L = 0$?	



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

4.4. FIGURA O IMAGEN 4

Fase 3: Plantee un problema que involucre conceptos de la fase anterior.

Problema: Suponga que $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y que $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$. Analice que da el $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$ si $L > 0$ y $M > 0$. ¿Y si $L = 0$? Analice también el caso $L > 0$, $M = \infty$ y $c = \infty$. Vaya cambiando ahora $L < 0$ y M y c por $\infty, -\infty, \infty, -\infty$. Luego repita todo para $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$, $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)}$ y para $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm g(x)$.

4.5. FIGURA O IMAGEN 5

Fase 4: Evalúe el problema creado por otro grupo y de sugerencias de mejora

Problema Mejorado: Sea $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$. Analice $\lim_{x \rightarrow c} f(x)g(x)$ si:

- $L > 0$ y $M > 0$. ¿Y si $L = 0$?
- $L = \infty$ y $M = \infty$. ¿Y si $L = 0$?
- $L > 0$, $M = \infty$ y $c = \infty$. ¿Y si $L = 0$?
- $L > 0$, $M = \infty$ y $c = -\infty$. ¿Y si $L = 0$?
- $L > 0$, $M = -\infty$ y $c = -\infty$. ¿Y si $L = 0$?
- $L < 0$, $M = \infty$ y $c = -\infty$. ¿Y si $L = 0$?
- Repita todo lo anterior para el caso $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$
- Repita todo lo anterior para el caso $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)}$
- Repita todo lo anterior para el caso $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \pm g(x)$

4.6. FIGURA O IMAGEN 6

Evaluación de la actividad:

¿Cómo se ha sentido con las 4 etapas para creación de problemas? ¿Cree que ha logrado aprender mediante el proceso de estas cuatro fases?

A mí me sirvieron mucho las 4 etapas. La primera que era solo analizar los ejercicios del libro me ayudó porque no me perdía tratando de resolverlos, sino solo entenderlos. Luego pude hacer muchos y nuevos problemas cambiando hipótesis. Aprendí mucho más con esto que si hubiera sido las clases como siempre porque al inventar cada problema uno tenía que saber como resolverlo primero.



IMPACTOS DE LA INNOVACIÓN EN LA DOCENCIA Y EL APRENDIZAJE

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bartle, R. & Sherbert, D. (2004). Introducción al análisis matemático de una variable. México: Limusa.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging pre-service middle-school teacher-education students in mathematical problem posing: development of an active learning framework. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 87-101.

Espinoza, J, Lupiañez, J y Segovia, I (2014). La invención de problemas y sus ámbitos de investigación en educación matemática. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Vol 14, Marzo 2014.

Grundmaier, T. (2015). Developing the Problem-Posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. Cap.20. Pág. 411-431. *Mathematical problem-posing*. Editors, Singer, Elleron, Cai. Springer.

Malaspina, U. (2015). Creación de problemas: sus potencialidades en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia. XIV CIAEM-IACME, Chiapas, México, 2015.

Mallart, A, Font, V. & Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos* vol. XXXVIII, núm. 152, pp 1430.

Milinković, J. (2015). Developing the Problem-Posing abilities of prospective elementary and middle school teachers. Cap. 3. Pág. 47-70. *Mathematical problem-posing*. Editors, Singer, Elleron, Cai. Springer.

Salazar, L (2014 a). Diseño de tareas a partir de la modificación de problemas planteados en libros de texto y su implementación con futuros profesores de matemática. *Revista Paradigma* vol XXXV (1) junio 2014 V-2.

Salazar, L (2014 b). Creación de problemas: un método alternativo para introducir y reafirmar el concepto de grupo. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*.

Salazar, L. (2015). Problem-posing as a didactic resource in formal mathematics courses to train future

secondary school mathematics teachers. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE)*. Special Issue. International Conference on University Teaching and Innovation. (CIDUI): Flexible Training Models. Vol 5, No2. 2015.

Singer, F. M. & Voica, C. (2013). A problem-solving conceptual framework and its implications in designing problem-posing tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 9-26.